DEFINIZIONI, TEOREMI, DIMOSTRAZIONI, RISULTATI NOTEVOLI e FANTADIMOSTRAZIONI

Mariano Spadaccini

11 aprile 2021 – Versione 1.1.0

Nessuna umana investigazione si può
dimandare vera scienza, se essa non
passa per le matematiche dimostrazioni.
Leonardo da Vinci

Copyright

Questo documento

In questo documento ho voluto riportare alcuni risultati quali dimostrazioni o semplicemente calcoli a cui assegno o ho assegnato una particolare rilevanza intellettuale rispetto alle altre dimostrazioni che ho affrontato durante i miei studi, nella speranza che possano stimolare l'interesse e la curiosità di eventuali lettori.
Invito gli stessi ad inviarmi commenti o eventuali correzioni presso l'indirizzo email riportato in copertina.

Ringraziamenti

Ringrazio me medesimo.

Indice

Parte I

Definizioni

Moda, mediana, medie

Moda

Definizione 0.1 *La* moda *(o* norma*) di una distribuzione è il valore più frequente (se esiste).*

Una distribuzione è *unimodale* se ammette un solo valore modale, è *bimodale* se ne ammette, *trimodale* se ne ha tre, ...

Nota operativa Per la determinazione della moda è opportuno ricorrere all'istogramma, individuando l'intervallo di altezza massima: la classe con la maggiore densità è quella modale.
Nella *distribuzione normale* (*gaussiana*), la *moda* coincide con la *media* e la *mediana*.

Mediana

Se si procede al riordinamento della distribuzione a valori crescenti, la mediana bipartisce la distribuzione in due subdistribuzioni: la prima (costituita dalla metà delle unità la cui modalità è minore o uguale alla mediana) e la seconda (costituita dalla metà delle unità la cui modalità è maggiore o uguale alla mediana).
In maniera tecnica, la mediana è il valore per il quale la frequenza relativa cumulata vale (o supera) $0,5$ (il 50 percentile).

Medie

Le medie comunemente impiegate sono la *media aritmetica*, *ponderata*, *geometrica*, *armonica*, ..., ma solo la prima è riconosciuta essere la media in senso popolare.

Media aritmetica

Definizione 0.2 *La media aritmetica (semplice) si ottiene sommando tutti i valori a disposizione e dividendo il risultato per il numero complessivo dei dati.*

Formalmente:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

in cui si è indicato con $\overline{x}$ la media di n valori.

Media ponderata

Definizione 0.3 *La* media aritmetica ponderata *(o* media pesata*) è calcolata sommando i valori moltiplicati per un coefficiente (*peso*) e dividendo per la somma dei pesi.*

Formalmente:

$$\overline{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

in cui f_i è il peso (frequenza) del termine *i*-esimo.

Nota La media aritmetica semplice è un caso particolare di media aritmetica ponderata nella quale i valori hanno tutti peso unitario.

Media geometrica

Definizione 0.4 *La* media geometrica *di n termini è la radice* n*-esima del prodotto degli n valori.*

Formalmente:

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Analogamente al caso precedente, si può generalizzare con la *media geometrica ponderata*:

$$\overline{x}_{g,p} = \sqrt[(\sum_{i=1}^{n} f_i)]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i}}$$

Media armonica

Definizione 0.5 *La* media armonica *di n termini è il reciproco della media aritmetica dei reciproci.*

Formalmente:

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Media integrale

Per generalizzare il concetto di media con distribuzioni continue si ricorre all'uso degli integrali.
Si abbia una funzione integrabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si definisce

Definizione 0.6

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Analogamente, data una seconda funzione $p : [a, b] \to \mathbb{R}$, tale che $p(x) > 0$ sia il *peso*, si definisce *media integrale pesata*

$$\mu_p = \frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

Media temporale Come caso particolare, si definisce la *media temporale* di un segnale $x(t)$ come la media integrale calcolata in un intervallo (t_1, t_2)

$$\overline{x}_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

Punto di accumulazione, limite, continuità, derivabilità

Intorno

Un intorno di un punto x è intuitivamente in insieme di punti *vicini* al punto x.

Definizione 0.7 *Un insieme I è definito* ***intorno di un punto*** *se contiene un insieme aperto contenente il punto.*

Un intorno di un punto x_0 non contenente il punto x_0 si definisce *intorno bucato* o *anulare*.

Punto di accumulazione

Definizione 0.8 *Dato l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce x_0* punto di accumulazione *per l'insieme A se, in ogni intorno $I(x_0)$, esiste almento un elemento x diverso da x_0 appartenente ad A.*

Formalmente:

$$\forall I(x_0) \exists\, x \in A : x \in I(x_0) \setminus x_0$$

Intuitivamente ciò significa che preso un $I(x_0)$, ci sono infiniti punti in A,

Limite

Il concetto di *limite* è utile per descrivere l'andamento di una funzione all'avvicinarsi del suo argomento a un valore fissato (*limite di una funzione*) oppure l'andamento di una successione al crescere verso l'infinito dell'indice (*limite di una successione*).

Limite di una successione

Intuitivamente una successione $\{a_n\}$ di numeri reali ha come limite il numero a se al crescere di n i termini della successione *sono arbitrariamente vicini* al valore a (quindi al *limite tendono ad* a).
Formalmente:

Definizione 0.9 *a_n tende ad a se per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere esiste un numero naturale N tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > N$.*

Se tale limite a esiste, si dice che la successione *converge ad* a. Se esiste, questo valore è unico.
Ad esempio, la successione $a_n = \frac{1}{n}$, che si espande in:

$$\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

converge a zero.
Esempio opposto, una successione può non avere limite, come $a_n = (-1)^n$, espansa in

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

Limite di una funzione

Sia data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme X della retta reale $\mathbb{R}$ e un punto di accumulazione x_0 di X. Un numero reale l è il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 se la differenza tra $f(x)$ e l è arbitrariamente piccola quando x si avvicina a x_0. Formalmente:

Definizione 0.10 *l è limite se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere esiste un altro numero reale positivo δ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni x in X con $|x - x_0| < \delta$*

In maniera contratta, si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{1}$$

Continuità

Derivabilità

Le medie comunemente impiegate sono la *media aritmetica*, *ponderata*, *geometrica*, *armonica*, ..., ma solo la prima è riconosciuta essere la media in senso popolare.

Media aritmetica

Media ponderata

Media geometrica

Media armonica

Media integrale

Parte II

Teoremi e Dimostrazioni

Teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora è un teorema della geometria euclidea che stabilisce una relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo.
Esistono tante dimostrazioni del teorema di Pitagora, ma tra tutte preferisco la seguente dimostrazione geometrica/algebrica.

Teorema 1 *In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.*

Dimostrazione 1.1 *Si considerano quattro triangoli rettangoli uguali, ognuno di cateti a e b e ipotenusa c. L'accostamento dei triangoli come in Figura 1 forma un quadrato piccolo internamente, e un quadrato[1] avente come lato le ipotenuse dei triangoli. Evidentemente, l'area di ogni triangolo è $\frac{ab}{2}$, e l'area del quadrato*

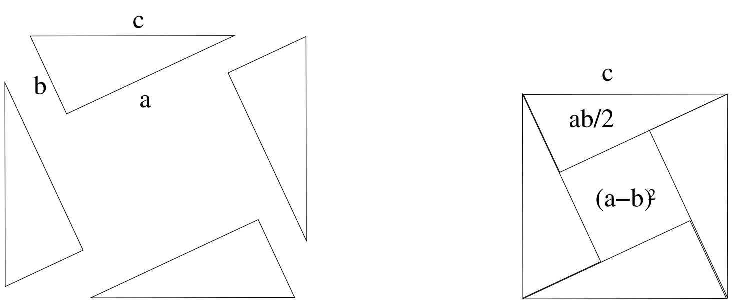

Figura 1: La Figura evidenzia una dimostrazione del teorema di Pitagora

grande è c^2.
Ma quest'area è uguale alla somma delle aree del quadrato interno $(a-b)^2$, e dei quattro triangoli che misurano insieme $4(ab/2)$, quindi:

$$\begin{aligned} c^2 = &\quad (a-b)^2 + 4(ab/2) = \\ = &\quad a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = \\ = &\quad a^2 + b^2 \end{aligned}$$

[1]è un quadrato poiché la somma dei due angoli non retti di un triangolo rettangolo forma un angolo retto

Curiosità Essendo il teorema uno dei più noti della storia della matematica, ne esistono tantissime dimostrazioni, ad esempio una del presidente statunitense James A. Garfield. Ne sono state classificate dallo statunitense *Elisha Scott Loomis* 371 differenti, pubblicate nel 1927 nel suo libro *The Pythagorean*.

Curiosità II Il teorema di Pitagora è vero anche se su ogni lato di un triangolo rettangolo si costruiscono figure simili tra loro, anche non regolari. L'enunciato diventa:

Teorema 2 *In ogni triangolo rettangolo, l'area di un qualunque poligono (anche curvilineo) costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei poligoni, simili a quello costruito sull'ipotenusa, costruiti sui cateti.*

Dimostrazione 2.1 *Siano:*

- a *e* b *i cateti;*
- c *l'ipotenusa;*
- A_1 *l'area del poligono costruito su* a*;*
- A_2 *l'area del poligono costruito su* b*;*
- A_3 *l'area del poligono costruito su* c*;*

e

- $k = \frac{a}{b}$ *il rapporto tra i cateti;*
- $h = \frac{c}{b}$ *il rapporto tra l'ipotenusa e il cateto* b*.*

Per il teorema di Pitagora in forma classica si ha:

$$c^2 = a^2 + b^2 = k^2 b^2 + b^2 = b^2(1 + k^2)$$

e quindi

$$\frac{c^2}{b^2} = 1 + k^2$$

Ricordando che, se due poligoni simili hanno 2 lati corrispondenti in rapporto h *allora le loro superfici sono in rapporto* h^2*, avendo definito* $h = \frac{c}{b}$*, risulta:*

$$A_3 = A_2 h^2 = \frac{A_2 c^2}{b^2} = A_2(1 + k^2) \tag{2}$$

Avendo definito k quale rapporto tra i due cateti, allora risulta uguale a k^2 il rapporto tra le aree dei poligoni simili costruiti su di essi, cioé

$$A_1 = k^2 A_2$$

sostituendo A_1 nella seguente:

$$A_1 + A_2 = k^2 A_2 + A^2 = (1 + k^2) A_2 \qquad (3)$$

e confrontando la (2) e (3) otteniamo:

$$A_1 + A_2 = A_3$$

come volevasi dimostrare.

Calcolo di $\sum z^i$

Teorema 3

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{1 - z^n}{1 - z} \qquad \textit{con } |z| < 1$$

Dimostrazione 3.1 *Sia*

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n \qquad \textit{con } |z| < 1; \tag{4}$$

moltiplicando entrambi i membri per z si ottiene:

$$z \sum_{i=0}^{n} z^i = z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^{n+1} \qquad \textit{con } |z| < 1; \tag{5}$$

sottraendo membro a membro la (4) da (5) otteniamo:

$$\sum_{i=0}^{n} z^i - z \sum_{i=0}^{n} z^i = 1 - z^{n+1}$$

$$(1 - z) \sum_{i=0}^{n} z^i = 1 - z^{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

ripetendo che abbiamo imposto $|z| < 1$.

Come caso particolare, per $n \to \infty$, la precedente formula può essere scritta nel seguente modo:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} z_i = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad \text{con } |z| < 1,$$

o, equivalentemente:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i = \frac{1}{1 - z} \qquad \text{con } |z| < 1. \tag{6}$$

Esistenza infiniti numeri primi

Tale dimostrazione è dovuta ad Euclide.

Teorema 4 *L'insieme dei numeri primi è infinito.*

Ipotesi (per assurdo) 4.1 *L'insieme dei numeri primi è finito.*

Dimostrazione 4.1 *Ci sarà un numero P primo maggiore di tutti gli altri. Sia Q un numero uguale al prodotto di tutti i numeri primi (da 2 a P compresi) più 1.*

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot P + 1$$

Poiché $Q > P$ e P è il numero primo più grande, Q dev'essere divisibile per almeno un numero primo oltre che per se stesso e per 1.
Ma per come è stato costruito, diviso per uno qualunque dei suoi fattori darà come risultato i restanti fattori con il resto di 1. Né puo essere divisibile per un numero primo maggiore di P poichè la sua esistenza è esclusa a priori (per la deduzione iniziale).

L'incommensurabilità

Di seguito si esplicherà il concetto di incommensurabilità con l'introduzione dei numeri irrazionali.
Si esamini il quadrato mostrato in Figura 2, in cui la lunghezza del lato è unitaria. Per calcolare la lunghezza della diagonale è possibile applicare il teorema di

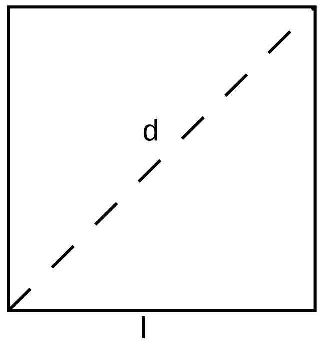

Figura 2: Quadrato: si supponda di lato unitario e, quindi, diagonale $\sqrt{2}$

pitagora:

$$\begin{aligned} d^2 &= 1^2 + 1^2 \\ d &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Pertanto il rapporto tra diagonale e lato è $\sqrt{2}$.
Si voglia dimostrare che $\sqrt{2}$ non può essere espresso sotto forma di rapporto tra numeri interi (numero *irrazionale*).

Ipotesi (per assurdo) 4.2 *Si ipotizzi che* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Dimostrazione 4.2 *Nel caso* a *e* b *avessero fattori comuni, si semplificherebbe la frazione ottentendo* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *con* p *e* q *primi tra loro.*

Ovviamente p e q non possono essere entrambi pari (se lo fossero conterrebbero entrambi il fattore 2).
Elevando i due membri al quadrato otteniamo:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$
$$p^2 = 2q^2$$

Si noti che il membro di destra è pari; poichè p^2 è uguale ad un numero pari, anche p sarà pari[2].
Poiché p e q non hanno fattori comuni, q non può essere pari, quindi è dispari.
Essendo p pari, può essere scritto nella forma $2r$; quindi:

$$\begin{aligned} p^2 &= 2q^2 \\ (2r)^2 &= 2q^2 \\ 4r^2 &= 2q^2 \\ 2r^2 &= q^2 \end{aligned}$$

Perciò q^2 è anch'esso un numero pari, quindi lo è anche q, in contrasto con quanto dedotto precedentemente.

Il precedente ragionamento parte dall'assunto che la frazione $\frac{a}{b}$ sia ridotta ai minimi termini. Questo assunto per correttezza dovrebbe essere dimostrato. Di seguito si utilizzerà un ragionamento simile senza prevedere tale assunto.

Ipotesi (per assurdo) 4.3 *Si ipotizzi che $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, con a e b interi positivi.*

Dimostrazione 4.3 *Elevando i due membri al quadrato otteniamo:*

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} &= 2 \\ a^2 &= 2b^2 \end{aligned}$$

Evidentemente:

- $a^2 > b^2 > 0$
- *a è pari perché $2b^2$ è pari.*

[2] se il quadrato di un numero è pari, dev'esserlo anche il numero originario

Scriviamo quindi $a = 2c$*, con* c *intero positivo. Sostituendo* $2c$ *ad* a *nell'equazione precedente otteniamo:*

$$4c^2 = 2b^2$$

Concludiamo nuovamente:

$$b^2 > c^2 > 0$$

Possiamo ancora ripetere il ragionamento, ottenendo una successione senza fine:

$$a^2 = 2b^2, b^2 = 2c^2, c^2 = 2d^2, d^2 = 2e^2, \ldots,$$

in cui

$$a^2 > b^2 > c^2 > d^2 > e^2 > \ldots$$

tutti questi interi sono positivi. Qualsiasi successione decrescente di interi positivi deve terminare, in contraddizione con il ragionamento stesso che questa successione è senza fine.

Tale dimostrazione conduce al capostipite di un nuovo genere di numeri detti *irrazionali*.
P.S. in maniera simile si domostra che la radice quadrata di un qualunque numero che non sia un quadrato perfetto è un numero irrazionale.
N.B. si deduce che i *numeri irrazionali* siano infinitamente maggiori dei *numeri razionali*.

Parte III

Identità e equazioni notevoli

Serie di Taylor e Maclaurin

La serie di Taylor di una funzione in un punto è la rappresentazione della funzione in serie di termini calcolati dalle derivate della funzione stessa nel punto.

Definizione 4.1 *La serie di Taylor di una funzione f(x) definita in un intervallo e infinite volte derivabile è la serie di potenze*

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

in maniera compatta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{7}$$

in cui $f^n(x_0)$ è la derivata n-esima della funzione f nel punto x_0. Se $x_0 = 0$ la serie è definita *serie di Maclaurin.*

Serie di Maclaurin notevoli

Di seguito alcuni sviluppi notevoli.

Funzione esponenziale

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{8}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{9}$$

Funzione logaritmo naturale

$$\begin{aligned} ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{per } |x| < 1 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Funzioni trigonometriche

$$\begin{aligned} sinx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad (10) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cosx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad (11) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Identità di Eulero $e^{ix} = cosx + isinx$

Si voglia verificare l'identità

$$e^{ix} = cosx + isinx \tag{12}$$

Da (8) l'espansione di Maclaurin di e^x è:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{13}$$

Da (11) l'espansione di Maclaurin di $cosx$ è:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{14}$$

Da (10) l'espansione di Maclaurin di $sinxx$ è:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{15}$$

Da (14) e (15) si ha:

$$\begin{aligned} cosx + isinx &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots && (16) \\ &= e^{ix} && (17) \end{aligned}$$

in cui in (16) si è utilizzata l'identità $i^2 = -1$, e in (17) si è utilizzata l'espansione (13). Quindi si ha l'*Identità di Eulero*:

$$e^{ix} = cosx + isinx$$

Identità di Eulero iperbolica

L'identità iperbolica di Eulero è la seguente:

$$e^x = cosh(x) + sinh(x) \tag{18}$$

Essa deriva dall'identità più generale per cui ogni funzione può essere suddivisa in due parti:

1. la parte pari, $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$;
2. la parte dispari, $\dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

quindi l'identità generale è:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Nel caso in oggetto sostituiamo $f(x) = e^x$, si ha:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= cosh(x) + sinh(x) \end{aligned}$$

Altre identità notevoli

Sicuramente una delle meno conosciute ma più belle identità matematiche:

$$\lceil e \rceil - \lfloor \pi \rfloor = 0$$

Parte IV

Altri risultati notevoli

$0,\overline{9} = 1$

I più imparano alle medie l'algorimo per la trasformazione dei numeri razionali in frazioni[3]. Si esegue questo semplice calcolo:

$$8,\overline{9} = \frac{89 - 8}{9} = \frac{81}{9} \tag{19}$$

e semplificando:

$$\frac{81}{9} = 9 \tag{20}$$

da (19) e (20) si ha

$$8,\overline{9} = 9. \tag{21}$$

La questione si risolve intuitivamente facilmente pensando che $8,\overline{9}$ è formato da talmente tante cifre[4] 9 dopo la virgola da non poter distinguersi dal numero 9; difatti, se fossimo riusciti a scrivere la differenza, significava che non avevamo considerato sufficienti cifre 9 dopo la virgola; poco correttamente ma intuitivamente si può scrivere

$$9 - 8,\overline{9} = 0,\overline{0}1.$$

Quanto analizzato in (21) è un caso particolare, la questione può essere generalizzata:

$$n + 0,\bar{9} = n + 1$$

e sottraendo n ad ambo i membri si ottiene:

$$0,\overline{9} = 1.$$

Utilizzando (6) a pag. 19 si può dimostrare formalmente la precedente identità:

[3] si veda la sezione A.1

[4] in effetti, scrivere *talmente tante cifre* significa che le cifre sono tante, ma in numero finito; si dovrebbe scrivere *infinite cifre*

Teorema 5 $0,\overline{9} = 1$

Dimostrazione 5.1

$$\begin{aligned}
0,\bar{9} &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots = \\
&= 0,9 \cdot (1 + 0,1 + 0,01 + \ldots) = \\
&= 0,9 \cdot (1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots) = \\
&= 0,9 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \\
&= 0,9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \\
&= 0,9 \cdot \frac{10}{9} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$cos^2 x + sin^2 x = 1$

Dal teorema di Pitagora a pag. 15 segue banalmente l'identità sopra. Alternativamente, è possibile utilzzare la rotazione e^{ix} monstrata a pag. 31, componendola con la sua rotazione opposta e^{-ix} per determinare uan *non rotazione*.

Quindi

$$\begin{aligned}
cos^2 x + sin^2 x &= (cosx + isinx)(cosx - isinx) \\
&= e^{ix} + e^{-ix} \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

Calcolo di $\int \sin^2 x dx$

Si voglia calcolare:

$$\int \sin^2 x dx$$

Di seguito si mostreranno alcune alternative per il calcolo.

Duplicazione

$$\int \sin^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) dx = \int dx - \int \cos^2 x dx$$

Dalle formule di duplicazione si ha:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

quindi

$$\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$$

per cui

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx = x - \int (\cos 2x + \sin^2 x) dx = \\ = x - \frac{\sin 2x}{2} - \int \sin^2 x dx\end{aligned}$$

e passando l'integrale del secondo membro al primo

$$2 \int \sin^2 x dx = x - \frac{\sin 2x}{2}$$

quindi

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + k$$

Per parti

$$\int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x \qquad = -\sin x \cos x + \int \cos x \cos x dx =$$
$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$$

Ricordando che

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

e che

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

sostituendo

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{\sin 2x}{2} + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

e torniamo al caso precedente.

Bisezione

Ricordando che

$$\sin^2 x = -\frac{1 - \cos 2x}{2}$$

sostituendo

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx =$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + k$$

Modo euleriano

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \int \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 dx = -\frac{1}{4}\int e^{2ix} - 2e^0 + e^{-2ix} dx = \\
&= -\frac{1}{4}\int e^{2ix} dx + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int e^{-2ix} dx = \\
&= -\frac{1}{4}\frac{e^{2ix}}{2i} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\frac{e^{-2ix}}{2i} + k = \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{8i}(\cos 2x + i\sin 2x) + \frac{1}{8i}(\cos 2x - i\sin 2x) + k = \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{8i} 2i \sin 2x + k = \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + k
\end{aligned}$$

Calcolo della somma della somma della somma ... della serie geometrica alternata di $0 < x < 1$

Segue dal *Teorema 3* pagina 19 con $0 < x < 1$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} (-x)^{n_1} = \frac{1}{1+x}$$

per estensione

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \Big(- \sum_{n_1=0}^{\infty} (-x)^{n_1} \Big)^{n_2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}$$

$$\sum_{n_3=0}^{\infty} \Big(- \sum_{n_2=0}^{\infty} \Big(- \sum_{n_1=0}^{\infty} (-x)^{n_1} \Big)^{n_2} \Big)^{n_3} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} \Big(- \cdots \sum_{n_3=0}^{\infty} \Big(- \sum_{n_2=0}^{\infty} \Big(- \sum_{n_1=0}^{\infty} (-x)^{n_1} \Big)^{n_2} \Big)^{n_3} \cdots \Big)^{n_k} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}} = \varphi - 1$$

Parte V

Fantadimostrazioni

2+2 può anche fare 3

FantaTeorema 1 *2+2 può anche fare 3*

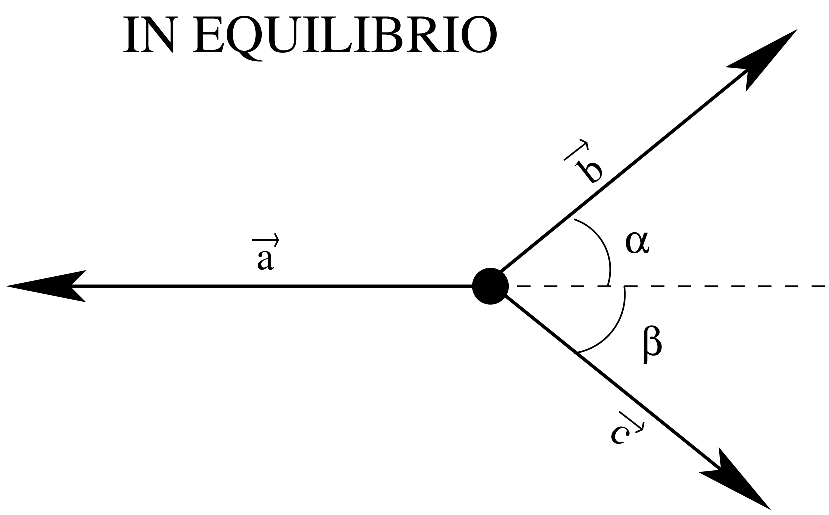

Figura 3: Poiché il sistema è in equilibrio, la risultante delle tre forze $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ è nulla

FantaDimostrazione 5.1 *Dalla Figura 3 si evince questa relazione:*

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

e l'uguaglianza tra i moduli:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b} + \vec{c}| \\ &= cos\alpha|\vec{b}| + cos\beta|\vec{c}|. \end{aligned}$$

Poiché mi piacciono le simmetrie, impongo $\alpha = \beta$ e con semplici passaggi determino α tale che sia soddisfatta la precedente uguaglianza:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= cos\alpha|\vec{b}| + cos\alpha|\vec{c}| \\
|\vec{a}| &= cos\alpha(|\vec{b}| + |\vec{c}|) \\
\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|} &= cos\alpha \qquad\qquad se \quad |\vec{b}| + |\vec{c}| \neq 0.
\end{aligned}
$$

Imponendo i valori numerici che mi sono proposto:

$$|\vec{a}| = 3 \qquad |\vec{b}| = 2 \qquad |\vec{c}| = 2$$

si determina il valore di α tale che il sistema sia in equilibrio:

$$\frac{3}{2+2} = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{3}{4}.$$

Appendice A

Complementi

A.1 Esprimere numeri razionali in frazioni

I numeri razionali, a differenza dei numeri irrazionali, possiamo rappresentarli attraverso frazioni in cui sia il numeratore sia il denominatore sono numeri interi.
In generale, consideriamo il numero a,b$\bar{\text{c}}$, in cui a, b e c sono numeri interi qualsiasi, con c non nullo[1], {b} sia il numero composto solo da cifre 0 quante sono le cifre di b, {c} sia il numero composto solo da cifre 9 quante sono le cifre di c.
L'equivalente frazionario di a,b$\bar{\text{c}}$ è:

$$a, b\bar{c} = \frac{abc - ab}{\{c\}\{b\}},$$

in cui {c}{b} rappresenta il numero composto dall'accostamento di {c} e {b} nell'ordine indicato.
Per esemplificare quanto scritto, riporto alcuni insulsi esempi.

`Esempio 1` Ø significa *niente*, *vuoto*

$$1, \bar{1} \rightarrow \quad \begin{array}{ll} a = 1 & \\ b = \emptyset & \{b\} = \emptyset \\ c = 1 & \{c\} = 9 \end{array}$$

$$1, \bar{1} = \frac{11 - 1}{9} = \frac{10}{9}$$

[1] se c fosse nullo sarebbe banale la trattazione

`Esempio 2`

$$2,1\bar{5} \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 1 \\ c &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \\ \{b\} &= 0 \\ \{c\} &= 9 \end{aligned}$$

$$2,1\bar{5} = \frac{215-21}{90} = \frac{194}{90} = \frac{97}{45}$$

`Esempio 3`

$$0,\bar{8} \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \emptyset \\ c &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \\ \{b\} &= \emptyset \\ \{c\} &= 9 \end{aligned}$$

$$0,\bar{8} = \frac{088-08}{90} = \frac{80}{90} = \frac{8}{9}$$

`Esempio 4`[2]

$$0,8\bar{8} \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 8 \\ c &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \\ \{b\} &= 0 \\ \{c\} &= 9 \end{aligned}$$

$$0,\bar{8} = \frac{088-08}{90} = \frac{80}{90} = \frac{8}{9}$$

[2] ancora più insignificante degli altri